پاسخنامه آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۱ تاریخ آزمون: پنجشنبه ۹۴/۱۰/۱۷

۱. حد زیر را به کمک تعریف انتگرال محاسبه کنید (۲ نمره).

$$\lim_{n\to\infty} n[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]$$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} n[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x+1}\Big|_0^1 = 0.5$$

۲. تابع مشتق پذیر و ناصفر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را چنان بیابید که در شرط زیر صدق کند (۱.۵ نمره):

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}dt$$

حل: با مشتق گیری از طرفین و استفاده از قضیه مشتق گیری از انتگرال داریم:

$$2f(x)f'(x) = f(x)\frac{\sin x}{2+\cos x} \xrightarrow{f\neq 0} f'(x) = \frac{1}{2}(\frac{\sin x}{2+\cos x})$$

$$\xrightarrow{\int} f(x) = \frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx = -\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+c,$$

$$f(0)=0 \ \to c=\frac{1}{2}\ln 3 \ \to \boxed{f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{(2+\cos x)}}$$

۳. هریک از انتگرال‌های زیر را حل کنید (۳ نمره).

I. $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$

II. $\int \frac{1}{x}\sin^{-1}(\ln x)\,dx$

III. $\int \frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)}$

حل I : برای انتگرالهای به فرم $\int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{dx}$ صورت و مخرج را در عبارت رادیکالی ضرب نموده و بصورت زیر با ضرائب نامعین محاسبه می کنیم:

$$\boxed{\int \frac{P_n(x)(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{dx} = \mathrm{Q_{n+1}(x)}\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{dx}}$$

$$\int \mathrm{x^3}\sqrt{4-\mathrm{x^2}}dx = \int\frac{-\mathrm{x^5}+4\mathrm{x^3}}{\sqrt{4-\mathrm{x^2}}}dx = (\mathrm{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E})\sqrt{4-\mathrm{x^2}} + \lambda\int\frac{1}{\sqrt{4-\mathrm{x^2}}}\mathrm{dx}$$

با مشتق گیری از طرفین داریم:

$$-\mathrm{x^5}+4\mathrm{x^3} = (4\mathrm{Ax^3}+3\mathrm{Bx^2}+2\mathrm{C}x+\mathrm{D})(4-\mathrm{x^2}) - \mathrm{x}(\mathrm{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E})+\lambda$$

$$\rightarrow\ -\mathrm{x^5} = -5\mathrm{Ax^5} \rightarrow \boxed{\mathrm{A}=\frac{1}{5}}\ ,\ 0 = -3\mathrm{Bx^4} - \mathrm{Bx^4} \rightarrow \boxed{\mathrm{B}=0},$$

$$4\mathrm{x^3} = 16\mathrm{Ax^3} - 2\mathrm{Cx^3} - \mathrm{Cx^3} \rightarrow \boxed{\mathrm{C}=-\frac{4}{15}}$$

$$12\mathrm{Bx^2} - \mathrm{Dx^2} - \mathrm{Dx^2} = 0 \rightarrow \boxed{\mathrm{D}=0} \rightarrow \boxed{\lambda=0}$$

$$8\mathrm{C}x - Ex = 0 \rightarrow \boxed{E=-\frac{32}{15}} \rightarrow \boxed{\int \mathrm{x^3}\sqrt{4-\mathrm{x^2}}dx = \left(\frac{1}{5}\mathrm{x^4}-\frac{4}{15}\mathrm{x^2}-\frac{32}{15}\right)\sqrt{4-\mathrm{x^2}}+\mathrm{c}}$$

حل II :

$$u=\ln x \rightarrow \int\frac{1}{x}\sin^{-1}(\ln x)\,dx = \int\sin^{-1}u\,du = u\sin^{-1}u - \int\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du$$

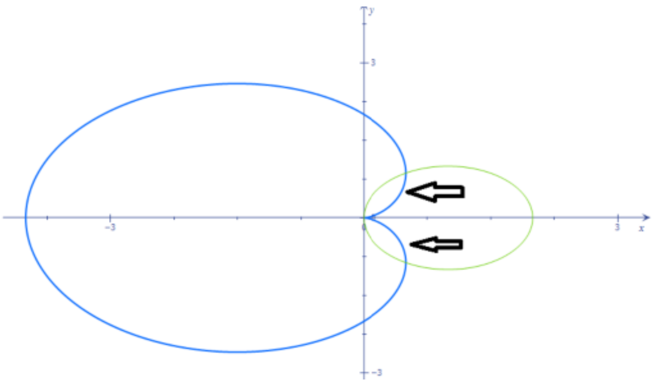
$$= u\sin^{-1}u + \sqrt{1-u^2} = \boxed{(\ln x)\sin^{-1}(\ln x) + \sqrt{1-(\ln x)^2}+\mathrm{c}}$$

حل III :

$$\int\frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)} = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{\frac{-1}{2}}{x+1}-\frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \boxed{\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c}$$

۴. مطلوبست محاسبه طول قوس قسمتی از دلوار $\mathrm{r} = 2(1-\cos\theta)$ که درون دایره‌ی $x^2+y^2=2x$ قرار دارد (۲ نمره).



حل: مطابق شکل قسمتی از منحنی قطبی دلوار را که درون دایره داده شده قرار گرفته است قابل مشاهده است. حال می بایست نقاط برخورد را یافت و سپس باتوجه به تقارن مشاهده شده در دو پاره خط، اندازه طول قوس یکی را بدست آورده و حاصل دوبرابر نمود:

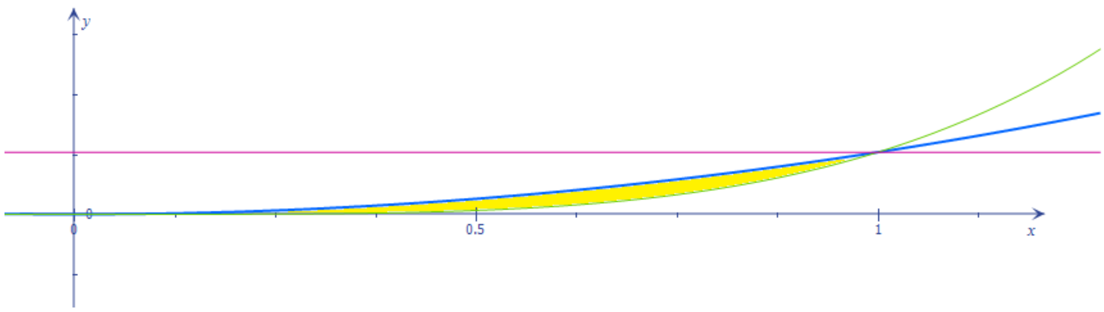
$$x^2+y^2=2x \rightarrow r^2=2r\cos\theta \rightarrow r=2\cos\theta$$

$$\mathrm{r}=2(1-\cos\theta), \qquad r=2\cos\theta \rightarrow \cos\theta=1-\cos\theta \rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$l=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{r^2(\theta)+\acute{r}^2(\theta)}\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\,d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=\boxed{16-8\sqrt{3}}$$

۵. ناحیه محصور بین منحنی های $\mathrm{y}=\mathrm{x}^2$ و $\mathrm{y}=\mathrm{x}^4$ در ربع اول که زیر خط $y=1$ قرار دارد را حول خط $x=2$ دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را بیابید (۲ نمره).

حل: توجه کنیم در فاصله ۰ تا ۱ نمودار تابع $\mathrm{y}=\mathrm{x}^4$ زیر نمودار تابع $\mathrm{y}=\mathrm{x}^2$ قرار می گیرد. لذا ناحیه مورد‌نظر ناحیه زردرنگ بوده و می بایست این ناحیه حول خط $x=2$ دوران داده شود.



می دانیم حجم حاصل از دوران یک ناحیه حول خط داده شده $x=0$ (محور عمودی) بصورت زیر محاسبه می شود:

$$V = \pi \int_a^b x^2(y)dy$$

بنابراین باتوجه به فرمول یاد شده اگر بخواهیم دوران ناحیه را حول خط $x = a$ بدست بیاوریم کافیست انتقالی به اندازه a روی محور افقی داشته باشیم تا دوران حول محور عمودی یا $x = 0$ بدست آید به عبارتی دیگر می بایست فاصله افقی نقاط ناحیه زردرنگ تا خط $x = a$ اندازه گرفته شده و سپس مربع این فاصله در انتگرال ظاهر گردد، لذا داریم:

حجم جسم حاصل از دوران حول خط $x = a$ محدود به محور افقی $V = \pi \int_a^b (\text{شعاع})^2 dy = \pi \int_a^b (x(y) - a)^2 dy$

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{y} - 2)^2 - (\sqrt[4]{y} - 2)^2]dy = \pi(y - 5\sqrt{y} + 4\sqrt[4]{y})\Big|_0^1 = \pi$$

۶. درباره همگرایی یا واگرایی سری عددی زیر با استفاده از آزمون ها بحث کنید (۱.۵ نمره).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$$

حل: با استفاده از آزمون لایبنیتز (آزمون سری متناوب) چون سری متناوب (یک در میان مثبت و منفی) است و دنباله $\left\{\frac{1}{\ln(n+1)}\right\}_n$ نزولی و همگرا به صفر است لذا این سری همگرا است.

۷. الف) با استفاده از انتگرال $\ln(1 + x^2) = \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt$ بسط مکلورن تابع $f(x) = \ln(1 + x^2)$ را محاسبه کرده و سپس شعاع و بازه همگرایی آن تعیین کنید (۱.۵ نمره).

ب) با استفاده از بند الف) مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ را بیابید (۰.۵ نمره).

الف) می دانیم که اگر $|x| < 1$ باشد آنگاه داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم بسط مک‌لورن (یا بعبارتی بسط تیلور حول مبدأ) برای یک تابع دلخواه $f(x)$ بصورت زیر است:

$$f(x) = f(0) + \acute{f}(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

حال باتوجه به رابطه (❋) بسط مک‌لورن تابع داده شده را بدست می آوریم. برای این منظور عبارت کسری سمت راست (❋) را به فرم کسر $\frac{2t}{1+t^2}$ در مسئله درآورده و در نهایت سری مطلوب را بدست آورد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \xrightarrow{-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{\times 2t} \sum_{n=0}^{\infty} 2t(-t^2)^n = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\xrightarrow{\int} \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} 2t(-t^2)^n\, dt = 2\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}$$

$$\boxed{\ln(1+x^2) = \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}}$$

روش دوم: با استفاده از سری اولیه بالا می توان با انتگرالگیری نیز بطور مستقیم به سری مطلوب دست یافت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{\int} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \xrightarrow{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{n+1} = -\ln(1+x^2)$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1} = \ln(1+x^2)}$$

برای بدست آوردن بازه همگرایی (مجموعه x هایی که سری به ازای آنها همگراست) و شعاع همگرایی R سری بالا طبق آزمون نسبت داریم:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{2n+4}}{n+2}}{\frac{|x|^{2n+2}}{n+1}} < 1 \rightarrow \boxed{\text{بازه همگرایی } |x| < 1} \rightarrow \boxed{\text{شعاع همگرایی } R = 1}$$

ب) باتوجه اینکه می دانیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ همگراست باتوجه به فرمول بدست آمده برای بسط مک‌لورن تابع داده شده از قسمت قبل با جایگذاری $x = 1$ داریم: